

Tentamen Talen en Automaten, 20 juni 2013, 9-12 uur

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen. Je mag stellingen uit het dictaat gebruiken, als je ze goed formuleert.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar. Nabespreking donderdag 9 juli (zie rooster).

Opgave 1 (10 %). Beschouw een taal L over het alfabet Σ . Vul voor de puntjes (...) één van de volgende eigenschappen van talen in: contextvrij, beslisbaar (*decidable*), semi-beslisbaar (*semi-decidable*), contextgevoelig (*context sensitive*), regulier.

- (a) L is ... \equiv L wordt geaccepteerd door een stapelautomaat (*PDM*)
- (b) L is ... \equiv L wordt geaccepteerd door een altijd eindigende Turingmachine
- (c) L is ... \equiv L wordt geaccepteerd door een deterministische eindige automaat (*DFSM*)
- (d) L is ... \equiv L wordt geaccepteerd door een Turingmachine.

(e) Zet deze vier types machines in volgorde zodat er bij elk paar machines voor elke machine M_1 van het eerste type een machine M_2 van het tweede type bestaat die dezelfde taal accepteert als M_1 .

Opgave 2 (8 %). (a) Laat $G = (V, \Sigma, P, S)$ een contextvrije grammatica zijn. Wanneer heet een symbool $x \in V \cup \Sigma$ nutteloos (*useless*), voortgebracht (*generated*), voortbrengend (*generating*)? Geef de definities.

(b) Gegeven is de grammatica G over $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ volgens

$$S \rightarrow AB \mid AC \mid aD$$

$$A \rightarrow aAa \mid bB \mid c$$

$$B \rightarrow bB \mid bD$$

$$C \rightarrow cC \mid \varepsilon$$

$$D \rightarrow dD \mid BA.$$

Bepaal volgens het standaardalgoritme een equivalente grammatica zonder nutteloze symbolen.

Opgave 3 (16 %). (a) Formuleer het Pomplemma voor reguliere talen.

De taal L_3 over het alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ wordt gegeven door de grammatica:

$$S \rightarrow ASC \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow aA \mid Aa \mid b$$

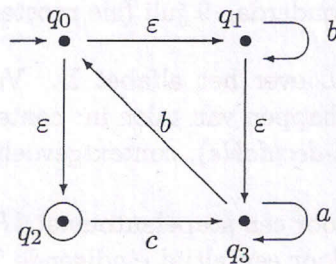
$$C \rightarrow aC \mid Ca \mid c.$$

(b) Bepaal de taal L_3 in verzamelingsnotatie (je kunt de telfuncties n_a , n_b en n_c gebruiken). Motiveer je antwoord.

(c) Bewijs dat de taal L_3 niet regulier is.

Opgave 4 (10 %). Beschouw de taal L_3 uit de vorige opgave. Construeer een enkelvoudige stapelautomaat (*simple PDM*) die de taal L_3 accepteert. Het is voldoende het toestandsdiagram te geven en duidelijk te maken waarom deze stapelautomaat de taal L_3 accepteert.

Opgave 5 (10 %). Beschouw over het alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ de nondeterministische eindige automaat M met ε -overgangen met het toestandsdiagram:



Construeer volgens het standaardalgoritme het toestandsdiagram (*state diagram*) van een deterministische automaat M_d equivalent met M .

Opgave 6 (6 %). Wat betekent het dat een grammatica in Chomsky normaalvorm is? Wanneer heeft een taal L een grammatica die in Chomsky normaalvorm is?

Opgave 7 (8 %). Beschouw de taal $L_7 = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ over het alfabet $\{a, b\}$. Bewijs dat L_7 contextvrij is.

Opgave 8 (10 %). Beschouw de taal L_7 uit de vorige opgave. Ontwerp een altijd eindigende Turingmachine die L_7 accepteert. Geef het volledige toestandsdiagram. Geef aan in welke toestanden de berekening kan eindigen als de invoer niet in L_7 zit.

Opgave 9 (10 %). (a) Geef de definities van beslisbare (*decidable*) en semi-beslisbare (*semi-decidable*) talen.

(b) Neem aan dat de talen L_1 en L_2 beslisbaar zijn. Bewijs dat de doorsnede $L_1 \cap L_2$ beslisbaar is.

Opgave 10 (12 %). Het dictaat beschrijft een manier om een Turingmachine M te coderen tot een string $R(M)$ over $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ en een universele Turingmachine UTM die gebruikt kan worden om de werking van een aldus gecodeerde machine M te simuleren op invoer uit \mathbb{B}^* .

Beschouw nu de taal L_{10} die bestaat uit de strings $R(M)1^n$ waarvoor executie van machine M bij lege invoer (ε) eindigt binnen n stappen.

(a) Beargumenteer dat de taal L_{10} beslisbaar is.

(b) De taal L'_{10} bestaat uit de beginstukken van strings uit L_{10} , dwz. $L'_{10} = \{u \mid \exists v : uv \in L_{10}\}$. Bewijs dat L'_{10} niet beslisbaar is.